

2ème année 2005-2006

## Codes linéaires, codes de Hamming

Octobre 2005

Objectifs :

- comprendre les codes linéaires ;
- découvrir les codes de Hamming.

▷ **Exercice 1 : Analyse d'un code linéaire**

Soit  $\mathcal{C}$  le code linéaire défini par la matrice  $G$  suivante

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1 - Quelles sont les caractéristiques de ce code  $(n, k, r)$  ?

1.2 - Expliciter ce code.

1.3 - Quelle est sa distance de Hamming ? Quel est son rendement ? Quelles sont ses capacités de détection/correction ?

▷ **Exercice 2 : Matrice de contrôle**

Donner une matrice de contrôle du code  $\mathcal{C}$  de l'exercice précédent.

▷ **Exercice 3 : Syndrome**

Soit  $\mathcal{C}$  un code de matrice génératrice suivante

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 - Quel est le syndrome associé au mot reçu  $c_1^* = [11111]$  ? Quel est le syndrome associé au mot reçu  $c_2^* = [11010]$  ? Selon le maximum de vraisemblance, quels sont les deux mots émis correspondants ?

3.2 - Quel est la distance de Hamming du code ? En quoi cela justifie-t-il la difficulté de correction de la question précédente ?

▷ **Exercice 4 : Les codes de Hamming**

Considérons un codage défini sur l'ensemble des mots de longueur  $k$  et associant à chacun un mot de longueur  $n = k + r$  ; l'alphabet de base sera  $0, 1$ .

4.1 - Quel doit être le cardinal de l'ensemble d'arrivée afin de permettre la correction d'au moins une erreur ?

4.2 - En déduire une relation entre  $k$  et  $r$  qui doit être nécessairement vérifiée pour qu'un tel code puisse corriger une erreur.

Prenons  $r = 3$  et choisissons la valeur optimale de  $k$  satisfaisant l'inéquation précédente. Nous allons construire un code corrigeant une erreur dans ces conditions. Un tel code est appelé code de Hamming.

4.3 - Combien de vecteurs colonne contient la matrice de contrôle de ce code ? Combien de composantes caractérisent ces vecteurs ?

Proposez alors une méthode de construction de cette matrice.

4.4 - Que constate-t-on si l'on calcule le syndrome associé à un mot ayant subi une erreur binaire ?

■

▷ **Exercice 5 : Syndrome**

Soit le code linéaire défini par les deux vecteurs suivants [0000] et [1111]. Quelles en sont les caractéristiques ? Donner son tableau standard.

■